L. Regueb	**Mathématiques**	*Classe : 4ème M*
Prof : Salhi Noureddine	*Devoir de Contrôle№1*	*Le : 13/11/2009* *Durée : 2h*

Exercice1(4pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et -1. Soit (ξ) le cercle de centre A et de rayon 1.Soit M un point du plan complexe privé de O, d'affixe $z = 1+e^{2i\theta}$ ou θ est un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Calculer le module de (z-1). En déduire que M appartient au cercle (ξ).
2) Montrer que, pour tout réel θ de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $z = 2\cos(\theta)e^{i\theta}$.
3) Soit M' le point d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{2\cos(\theta)}e^{i(\pi+\theta)}$
   a) Montrer que les points O , M et M' sont alignés.
   b) Prouver que $|z'+1| = |z'|$ puis en déduire que M' décrit une droite (D) que l'on déterminera.

Exercice2(6pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1): $\frac{z-2}{z-1} = z$.
   On donnera le module et un argument de chaque solution.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (2): $\frac{z-2}{z-1} = i$.
   On donnera la solution sous forme algébrique.
3) soit M , A et B les points d'affixes respectives z , 1 et 2.
   a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$.
   b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).

4)a) Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$, ou n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation, (3): $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$.
   On cherchera les solutions sous forme algébrique.

Exercice3(6pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}(x^2-2x+4)$.

1)a) Etudier les variations de f.
   b) En déduire que: si $x \in]1\,,4[$ alors $f(x) \in]1\,,4[$.

2) Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.
   a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $1 < v_n < 4$.
   b) Prouver que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(v_n-1)(v_n-4)$.
   c) En déduire que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice4(4pts)

Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ sont tracées chacune à part les courbes (C_f) et (C_g) représentatives des fonctions f et g. L'axe des ordonnées est une asymptote à (C_f).

Déterminer à l'aide des graphiques et en justifiant:

1) $g\circ f([1,2])$ et $f\circ g(]-\infty,-2])$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(g\circ f)(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(g\circ f)(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}(f\circ g)(x)$.